

雷达对抗讲义

目 录

第 1 章 基础知识	1
1.1 符号规定	1
1.2 矩阵微积分	1
1.3 复矩阵微积分	4
1.4 常见统计量	6
1.5 拉格朗日乘数法	6
第 2 章 无源定位	9
2.1 测向定位	9
2.1.1 二维平面	9
2.1.2 三维空间	13
2.2 时差定位	16
2.3 频差定位	18
第 3 章 雷达信号处理基础	21
3.1 雷达信号的基本形式	21
3.2 目标参数测量	24
3.2.1 测距	24
3.2.2 测角	26
3.3 测速	28
第 4 章 超分辨率参数测量	29
4.1 谱估计	29
4.1.1 补零法	29
4.1.2 Capon 算法	30
4.1.3 MUSIC 算法	30
4.2 来波方位估计	30
4.2.1 Capon 算法	30
4.2.2 MUSIC 算法	31
4.2.3 ESPRIT 算法	32

4.3 时延估计	32
4.3.1 互相关法	32
4.3.2 相位拟合法	33
 第 5 章 雷达抗干扰	 35
5.1 最小二乘	35
5.2 独立成分分析	36
5.3 主偏度分析	38
5.3.1 偏度的定义	38
5.3.2 数据白化	39
5.3.3 张量基本运算	40
5.3.4 统计量映射图	42
5.3.5 任意方向的偏度	44
5.3.6 协偏度张量的计算	45
5.3.7 模型与求解	47

第 4 章 超分辨率参数测量

在实际应用中，获得的数据往往是离散且有限的，如何基于这些数据进行超分辨率参数测量是一个重要的研究课题。本章包括三个主要部分：谱估计、来波方位估计和时延估计。

4.1 谱估计

谱估计是信号处理中的一个重要问题，旨在从有限的观测数据中估计信号的频谱特性。最常见的，也是最简单的方法就是利用傅里叶变换来估计信号的频谱。假设采样率为 f_s ，共采样了 N 个样本，信号的离散傅里叶变换（DFT）可以表示为：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

其中， $x[n]$ 是采样信号， $X[k]$ 是信号的离散傅里叶变换。不难发现，相邻两个频率点之间的间隔为 $\frac{f_s}{N}$ ，换句话说，DFT 的分辨率为 $\frac{f_s}{N}$ 。显然，实际应用中，信号的频率大概率不会是 $\frac{f_s}{N}$ 的整数倍，因此 DFT 的分辨率往往不足以满足实际需求。

为此，提出了多种提高频率分辨率的超分辨率谱估计方法。以下介绍几种典型方法。

4.1.1 补零法

补零法（Zero Padding）是最简单直接的“提高频率分辨率”的方法。它的核心思想是在已有的数据后面补充足够多的零，使序列长度从 N 增加到 M （通常 $M = 2^k$ ，且 $M > N$ ），再对该长度为 M 的序列进行 DFT。

此时 DFT 的频率分辨率提高为：

$$\Delta f = \frac{f_s}{M}$$

虽然补零并不会带来真正的频率分辨率提高（并不能区分原本 DFT 无法区分的频率成分），但可以使频谱曲线在视觉上更加平滑、细腻，更便于观测频率成分的分布情况。

例如，若信号长度为 $N = 64$ ，通过补零到 $M = 1024$ ，可以将频谱图绘制得非常平滑，有助于估计主频率分量。

4.1.2 Capon 算法

Capon 算法（最小方差无畸变响应谱估计，MVDR）是一种经典的基于自适应波束形成的高分辨率谱估计方法。其思想是设计一个滤波器权向量 $\mathbf{w}(f)$ ，使输出功率最小，但在希望的频率 f 上保持单位响应。

设信号数据的协方差矩阵为 $\mathbf{R}$ ，导向矢量为：

$$\mathbf{a}(f) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi f T_s} & \dots & e^{-j2\pi f (M-1)T_s} \end{bmatrix}^T$$

其中 $T_s = \frac{1}{f_s}$ 。

则 Capon 算法的谱估计表达式为：

$$P_{\text{Capon}}(f) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(f)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}(f)}$$

它相比传统的周期图或 Welch 方法，能有效抑制旁瓣泄漏，并提供更高的频率分辨率。

4.1.3 MUSIC 算法

MUSIC（Multiple Signal Classification）算法是一种基于特征空间分解的超分辨率谱估计方法。其核心思想是利用协方差矩阵的特征分解，将信号子空间与噪声子空间分离。

具体来说，设协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 的特征值分解为：

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H$$

其中， $\mathbf{U}_s$ 对应信号子空间， $\mathbf{U}_n$ 对应噪声子空间。

利用噪声子空间的正交性，可以得到 MUSIC 的谱函数为：

$$P_{\text{MUSIC}}(f) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(f)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(f)}$$

当扫描的频率 f 与真实的信号频率一致时，导向矢量 $\mathbf{a}(f)$ 将与噪声子空间正交，从而在谱函数上产生尖锐峰值。

MUSIC 由于能够利用阵列信号处理中的空间自由度，能在短时间观测下实现比 DFT 更高的分辨率，常用于多频率信号或多入射波角度的估计。

4.2 来波方位估计

4.2.1 Capon 算法

Capon 算法是一种最小方差无失真响应（MVDR）方法，旨在在给定方向 θ 上保持单位增益的同时，最小化输出功率。

设阵列接收信号为

$$\mathbf{x}(n) = s(n)\mathbf{a}(\theta) + \mathbf{n}(n),$$

其中 $\mathbf{a}(\theta)$ 是阵列导向向量,

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-jkd \sin \theta}, \dots, e^{-jkd(M-1) \sin \theta}]^T.$$

协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}.$$

Capon 通过求解以下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) = 1. \end{aligned}$$

采用拉格朗日乘子法:

$$L = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) - 1).$$

对 $\mathbf{w}$ 求导并令为零, 得

$$\mathbf{R} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{a}(\theta).$$

因此

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta).$$

代入约束条件求 λ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) &= \lambda^* \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta) = 1 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}. \end{aligned}$$

最终得到权值向量

$$\mathbf{w}_{\text{opt}}(\theta) = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)},$$

对应的空间谱为

$$P_{\text{Capon}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}.$$

4.2.2 MUSIC 算法

MUSIC 算法将协方差矩阵分解为信号子空间和噪声子空间:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H,$$

其中 $\mathbf{U}_s$ 为信号子空间特征向量, $\mathbf{U}_n$ 为噪声子空间特征向量。

因为信号子空间与噪声子空间正交,

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta_i) = 0,$$

因此定义 MUSIC 空间谱为

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta)},$$

在真实信号方向处出现谱峰, 通过扫描 θ 寻找峰值即为 DOA 估计。

4.2.3 ESPRIT 算法

ESPRIT 通过子阵平移不变性直接估计 DOA。

- 将阵列分为两个平移子阵, 导向矢量满足

$$\mathbf{a}_2(\theta) = e^{-jkd \sin \theta} \mathbf{a}_1(\theta).$$

- 根据接收数据的子空间分解, 满足

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_x \Phi,$$

其中 Φ 是 $L \times L$ 的旋转矩阵, 求解最小二乘

$$\Phi \approx (\mathbf{E}_x^\dagger) \mathbf{E}_y,$$

再对 Φ 特征值分解得到

$$\Phi \mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{v}_i.$$

- μ_i 与入射角关系为

$$\mu_i = e^{-jkd \sin \theta_i},$$

从而

$$\theta_i = \arcsin\left(-\frac{\angle(\mu_i)}{kd}\right).$$

4.3 时延估计

4.3.1 互相关法

互相关函数定义为

$$R_{xy}(\tau) = \sum_n x[n] y^*[n - \tau],$$

τ 对应最大值处为估计延迟。

4.3.2 相位拟合法

若 $y(t) = x(t - \tau)$ ，其频谱为

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi f\tau}.$$

取幅-相形式

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}, \quad Y(f) = |Y(f)|e^{j\phi_y(f)},$$

则相位差为

$$\phi_y(f) - \phi_x(f) = -2\pi f\tau.$$

可在多频率点上拟合直线求斜率，从而估计

$$\tau = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} (\phi_y(f) - \phi_x(f)).$$

实际需进行相位展开 (unwrap) 再拟合。