

雷达对抗讲义

目 录

第 1 章 基础知识	1
1.1 符号规定	1
1.2 矩阵微积分	1
1.3 复矩阵微积分	4
1.4 常见统计量	6
1.5 拉格朗日乘数法	6
第 2 章 无源定位	9
2.1 测向定位	9
2.1.1 二维平面	9
2.1.2 三维空间	13
2.2 时差定位	16
2.3 频差定位	18
第 3 章 雷达信号处理基础	21
3.1 雷达信号的基本形式	21
3.2 目标参数测量	24
3.2.1 测距	24
3.2.2 测角	26
3.3 测速	28
第 4 章 超分辨率参数测量	29
4.1 谱估计	29
4.1.1 补零法	29
4.1.2 Capon 算法	30
4.1.3 MUSIC 算法	30
4.2 来波方位估计	30
4.2.1 Capon 算法	30
4.2.2 MUSIC 算法	31
4.2.3 ESPRIT 算法	32

4.3 时延估计	32
4.3.1 互相关法	32
4.3.2 相位拟合法	33
 第 5 章 雷达抗干扰	 35
5.1 最小二乘	35
5.2 独立成分分析	36
5.3 主偏度分析	38
5.3.1 偏度的定义	38
5.3.2 数据白化	39
5.3.3 张量基本运算	40
5.3.4 统计量映射图	42
5.3.5 任意方向的偏度	44
5.3.6 协偏度张量的计算	45
5.3.7 模型与求解	47

第3章 雷达信号处理基础

在本章，我们将用矩阵的语言来描述雷达信号处理的基本概念。基于矩阵语言，我们还将讨论雷达信号处理中的一些基本问题，例如测距、测角和测速等。

3.1 雷达信号的基本形式

雷达作为一种主动探测设备，其发射信号由两部分组成：低频包络信号和高频载波信号，即

$$s(t) = p(t)e^{j2\pi f_c t},$$

其中 $p(t)$ 是低频包络信号， f_c 是高频载波频率。调制信号 $p(t)$ 可以是任意形式的信号，最常见的调制信号是线性调频信号（Linear Frequency Modulation，简称 LFM），其表达式为

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) e^{j\pi\kappa t^2},$$

其中 T_p 是脉冲宽度， κ 是调频率，而 $\text{rect}(t)$ 是矩形函数，定义为

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

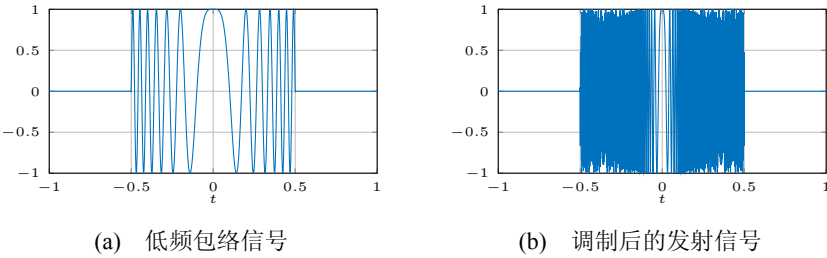


图 3.1 雷达发射信号的示意图

雷达系统的接收信号则是由目标发射的回波信号叠加噪声而成的。假设共有 K 个目标，且第 k 个目标的距离为 R_k ，对应的回波幅度和相位为 $A_k = |A_k|e^{j\phi_k}$ ，则接收信号可以表示为

$$r(t) = \sum_{k=1}^K r^{(k)}(t) + n(t) = \sum_{k=1}^K A_k s\left(t - \frac{2R_k}{c}\right) + n(t),$$

其中 $n(t)$ 是噪声信号, c 是光速。

随着时代的发展, 阵列雷达逐渐成为了雷达系统的主流。在目标足够远的情况下, 目标反射的球面回波在接收阵列上可以近似为平面波。假设接收阵列的阵元数为 M , 阵元间距为 d , 第 k 个目标对应的入射角为 θ_k 。那么如图 3.2 所示, 对于第 k 个目标而言, 其反射的电磁波到第 m 个阵元的距离比到第 0 个阵元的接收信号少了 $md \sin \theta_k$, 因此第 m 个阵元提前 $m \frac{d \sin \theta_k}{c}$ 接收到了第 k 个目标反射的回波信号。

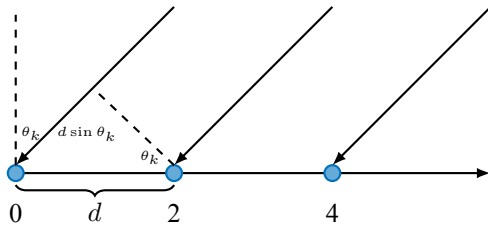


图 3.2 阵列雷达接收信号示意图

此外, 现代雷达为了能够测量目标的速度, 会进一步发射多个脉冲信号, 利用多普勒效应来获取目标的速度信息。假设发射的脉冲数为 N , 脉冲间隔为 T_r , 且第 k 个目标的径向速度为 v_k , 则对于第 k 个目标, 第 m 个阵元接收到的第 n 次脉冲对应的回波信号可以表示为

$$\begin{aligned}
 r_{mn}^{(k)}(t) &= A_k s \left(t - \frac{2R_k - md \sin \theta_k - 2nT_r v_k}{c} \right) \\
 &= A_k p \left(t - \frac{2R_k - md \sin \theta_k - 2nT_r v_k}{c} \right) e^{j2\pi f_c \left(t - \frac{2R_k - md \sin \theta_k - 2nT_r v_k}{c} \right)} \\
 &\approx A_k p \left(t - \frac{2R_k}{c} \right) e^{j2\pi f_c \left(t - \frac{2R_k}{c} \right)} e^{j \frac{2\pi f_c md \sin \theta_k}{c}} e^{j \frac{2\pi f_c 2nT_r v_k}{c}} \\
 &= A_k r^{(k)}(t) e^{j \frac{2\pi f_c md \sin \theta_k}{c}} e^{j \frac{2\pi f_c 2nT_r v_k}{c}}.
 \end{aligned}$$

此时, $A_k r^{(k)}(t) = A_k p \left(t - \frac{2R_k}{c} \right) e^{j2\pi f_c \left(t - \frac{2R_k}{c} \right)} = A_k s \left(t - \frac{2R_k}{c} \right)$ 代表的是第 0 个阵元在第 0 次脉冲接收到的第 k 个目标的回波信号。换句话说, 不同阵元在不同脉冲时刻接收到的信号之间可以近似地认为只存在一个相位差。对于第 k 个目标, 假设系统每次以采样率 f_s 对回波信号进行了 L 点采样, 那么每次脉冲对应的接收信号为一个 $L \times M$ 的矩阵, 而 N 次脉冲则对应一个 $L \times M \times N$ 的三维张量。记该张量为 $\mathcal{X}^{(k)}$, 则该张量的第 l, m, n 个元素可以表示为

$$\mathcal{X}_{lmn}^{(k)} = A_k r^{(k)} \left(\frac{l}{f_s} \right) e^{j \frac{2\pi f_c md \sin \theta_k}{c}} e^{j \frac{2\pi f_c 2nT_r v_k}{c}}.$$

定义 3.1 (向量外积) 给定 N 个向量, $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{C}^{N_1}, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{C}^{N_2}, \dots, \mathbf{v}_N \in \mathcal{C}^{N_N}$, 它们的

外积为一个 $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_N$ 的张量，记为

$$\mathcal{X} = \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 \circ \cdots \circ \mathbf{v}_N \in \mathcal{C}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_N},$$

其中

$$\mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_N} = v_{1i_1} v_{2i_2} \cdots v_{Ni_N}, \quad i_k = 1, 2, \cdots, N_k.$$

记

$$\mathbf{r}^{(k)} = \begin{bmatrix} r^{(k)}(0) \\ r^{(k)}\left(\frac{1}{f_s}\right) \\ r^{(k)}\left(\frac{2}{f_s}\right) \\ \vdots \\ r^{(k)}\left(\frac{L-1}{f_s}\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\theta_k} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2\pi f_c d \sin \theta_k}{c}} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi f_c (M-1)d \sin \theta_k}{c}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{v_k} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2\pi f_c 2T_r v_k}{c}} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi f_c 2(N-1)T_r v_k}{c}} \end{bmatrix},$$

那么根据外积的定义， $\mathcal{X}^{(k)}$ 可以表示为

$$\mathcal{X}^{(k)} = A_k \mathbf{r}^{(k)} \circ \mathbf{a}_{-\theta_k} \circ \mathbf{b}_{-v_k}.$$

最终，考虑所有目标以及噪声，总的接收信号张量可以表示为

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^K A_k \mathcal{X}^{(k)} + \mathcal{N} = \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \circ \mathbf{a}_{-\theta_k} \circ \mathbf{b}_{-v_k} + \mathcal{N},$$

其中 $\mathbf{a}_{\theta_k}$ 和 $\mathbf{b}_{v_k}$ 被称作导向矢量 (Steering Vector)，分别包含了目标的入射角和径向速度信息。

下面，我们考虑一种特殊情况，即脉冲数 $N = 1$ ，也即只发射一个脉冲信号。此时，接收信号张量退化为一个 $L \times M$ 的矩阵，有如下的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \circ \mathbf{a}_{-\theta_k} + \mathbf{N} = \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{a}_{-\theta_k}^T + \mathbf{N} \\ &= \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{a}_{\theta_k}^H + \mathbf{N} \end{aligned}$$

记

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} A_1 \mathbf{r}^{(1)} & A_2 \mathbf{r}^{(2)} & \cdots & A_K \mathbf{r}^{(K)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\theta_1} & \mathbf{a}_{\theta_2} & \cdots & \mathbf{a}_{\theta_K} \end{bmatrix},$$

那么接收信号矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{A}^H + \mathbf{N}.$$

该信号模型表明，接收信号矩阵可以看作是一个低秩矩阵（即目标的回波信号）和噪声的叠加，对该矩阵的分析是上个世纪阵列信号处理领域的一个重要研究方向。

类似地，如果只有一个阵元，同时有 N 个脉冲，那么接收信号张量同样退化为一

个 $L \times N$ 的矩阵:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \circ \mathbf{b}_{-v_k} + \mathbf{N} = \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{b}_{-v_k}^T + \mathbf{N} = \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{b}_{v_k}^H + \mathbf{N}.$$

记

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{v_1} & \mathbf{b}_{v_2} & \cdots & \mathbf{b}_{v_K} \end{bmatrix},$$

那么接收信号矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{B}^H + \mathbf{N}.$$

3.2 目标参数测量

目标参数测量是雷达信号处理的一个重要任务, 主要包括测距、测速和测角, 这三个参数分别包含在上一节中提到的构建的接收信号张量中三个向量中。

3.2.1 测距

测距的基本原理非常简单, 我们知道雷达接收到的回波信号与发射信号之间存在一个时间延迟, 通过估计这个时间延迟, 我们就可以计算出目标的距离。假设以 f_s 的采样率对发射信号进行采样, 得到向量 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{L_s \times 1}$, 与此同时, 接收信号对应的向量为 $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{L \times 1}$ 。

显然, 我们的目的是在向量 $\mathbf{r}$ 中找到与 $\mathbf{s}$ 相似的部分, 记

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_{i+L_s-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{L_s \times 1}, \quad i = 0, 1, \dots, L - L_s, \quad (3.1)$$

那么我们可以利用一个线性判别算子 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{L_s \times 1}$ 来对所有的 $\mathbf{r}_i$ 进行判别, 对应的响应值为 $y_i = |\mathbf{r}_i^H \mathbf{v}|$ 。显然, 我们希望当 $\mathbf{r}_i$ 对应某个目标的回波信号时, y_i 的值尽可能大, 而当 $\mathbf{r}_i$ 对应噪声时, y_i 的值尽可能接近 0。

但这样的期望并不容易实现, 因为我们不知道 $\mathbf{r}$ 中哪些是回波信号, 哪些是噪声。好在我们知道回波信号的基本形式, 也就是向量 $\mathbf{s}$, 因此可以构建如下的目标函数:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{v}} & \sum_{i=0}^{L-L_s} y_i^2 \\ \text{s.t.} & \mathbf{s}^H \mathbf{v} = 1 \end{cases}.$$

该目标函数巧妙地约束了发射信号向量对应的响应值为 1, 与此同时, 最小化整个回波信号的响应的能量。如此一来, 回波向量中非目标对应的响应值就会被尽可能地压制, 而目标对应的响应值则由于约束的存在而不会被压制, 从而达到检测目标的目的。

注意到，通过构造如下的矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 & \mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_{L-L_s} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{L_s \times (L-L_s+1)},$$

整个回波信号的响应的能量可以表示为

$$\sum_{i=0}^{L-L_s} y_i^2 = \sum_{i=0}^{L-L_s} |\mathbf{r}_i^H \mathbf{v}|^2 = \sum_{i=0}^{L-L_s} \mathbf{v}^H \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^H \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{L-L_s} \mathbf{v}^H \mathbf{X} \mathbf{X}^H \mathbf{v}.$$

记 $\mathbf{R} = \mathbf{X} \mathbf{X}^H$ ，则目标函数可以改写为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{v}} & \mathbf{v}^H \mathbf{R} \mathbf{v} \\ \text{s.t.} & \mathbf{s}^H \mathbf{v} = 1 \end{cases}.$$

对于该目标函数，我们可以利用拉格朗日乘子法来求解。构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^H \mathbf{R} \mathbf{v} - \lambda (\mathbf{s}^H \mathbf{v} - 1),$$

对其求导并令其为 0，得到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{R} \mathbf{v} - \lambda \mathbf{s} = 0.$$

求解该等式，有

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}.$$

将其代入约束条件中，得到

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}}.$$

因此，我们可以得到该线性判别算子的最优解

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}}.$$

注意到 $\mathbf{R}$ 正比于回波信号的协方差矩阵（假设均值为 0），而实际应用中，回波信号中目标信号的占比非常小，大部分是噪声，因此当我们假设噪声是白噪声时， $\mathbf{R}$ 正比于一个单位矩阵。此时， $\mathbf{v}$ 正比于发射信号向量 $\mathbf{s}$ ，即

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{s}.$$

而对于线性判别器来说， α 的值并不重要，因此我们可以将其设为 1。最终，我们可以得到白噪声下的线性判别算子为

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}.$$

对应的判别结果为

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}^H \mathbf{s}.$$

而上式就等价于将向量 $\mathbf{r}$ 与发射信号向量 $\mathbf{s}$ 进行互相关运算。通过该操作，我们可以将发射出去的一个具有一定宽度的脉冲信号压缩为一个很窄的峰，因此该操作也被成

为脉冲压缩 (Pulse Compression)。又因为该线性判别算子和发射信号向量相同, 因此也被称为匹配滤波器 (Matched Filter)。

在匹配滤波之后, 可以通过检测向量 $\mathbf{y}$ 中的峰值来确定目标的距离。假设 y_i 是向量 $\mathbf{y}$ 中一个峰值, 那么对应的延迟时间为 $\frac{i}{f_s}$, 因此目标的距离为

$$R = \frac{ic}{2f_s}.$$

注意到, 匹配滤波本质上就是计算发射信号与回波信号之间的互相关函数, 而回波信号只是发射信号的延迟以及幅度和相位的变化, 因此匹配滤波得到的峰值附近的曲线正比于发射信号的自相关函数。而一个函数的自相关函数的宽度取决于该信号的带宽, 带宽越大, 自相关函数的宽度越小。

3.2.2 测角

这里, 我们考虑一个采样点数为 L , 阵元数为 M , 脉冲数为 1 的阵列雷达系统。根据上一节的讨论, 接收信号矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{a}_{\theta_k}^H + \mathbf{N} = \mathbf{R} \mathbf{A}^H + \mathbf{N},$$

注意到, $\mathbf{a}_{\theta_k}$ 是一个频率为 $\frac{f_c d \sin \theta_k}{c}$ 的复数指数信号。因此, 当阵元数 M 足够多时, 我们有

$$\mathbf{a}_{\theta_i}^H \mathbf{a}_{\theta_j} \approx M \delta_{ij},$$

即不同入射角对应的导向矢量之间正交。因此, 对于某个入射角 θ , 我们可以构建对应的导向矢量 $\mathbf{a}_\theta$ 并利用该导向矢量对接收信号矩阵进行投影, 得到

$$\mathbf{y}_\theta = \frac{1}{M} \mathbf{X}^H \mathbf{a}_\theta.$$

不难发现, 当 $\theta = \theta_k$ 时, 有

$$\mathbf{y}_{\theta_k} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{a}_{\theta_k} + \frac{1}{M} \mathbf{N} \mathbf{a}_{\theta_k} \approx A_k \mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{n}_{\theta_k},$$

其中 $\mathbf{n}_{\theta_k} = \frac{1}{M} \mathbf{N} \mathbf{a}_{\theta_k}$ 是一个噪声向量。

换句话说, 利用导向矢量 $\mathbf{a}_\theta$ 对回波数据进行投影, 我们可以获得 θ 方向上的接收信号。因此, 通过遍历 θ , 我们可以得到所有入射角对应的接收信号。进一步地, 由于 $\mathbf{a}_\theta$ 是一个复指数信号, 因此本质上上述操作就是对接收信号矩阵沿着导向矢量的维度进行了一次傅里叶变换。此外, 因为复指数信号的频率为 $\frac{f_c d \sin \theta}{c}$, 并不是随着 θ 线性变换的, 所以该傅里叶变换是非均匀的。

在实际应用中, 获取所有阵元的数据并不容易, 并且阵元数也往往不够多, 导向矢量之间的正交性并不能得到保证。为此, 还有一种基于和差波束的测角方法, 该方

法的核心思想是利用目标在和差波束上的响应差异来进行角度估计。

设有一个具有 $2M$ 个阵元的阵列，其和波束指向 θ 方向，并且在该方向附近，存在一个目标，其入射角为 θ_k 。不考虑噪声的情况下，该目标在和波束上的响应为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\theta &= \frac{1}{M} \mathbf{X}^H \mathbf{a}_\theta = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{a}_\theta \approx \frac{1}{M} A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{a}_\theta \\ &= \frac{A_k \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{a}_\theta}{M} \mathbf{r}^{(k)}. \end{aligned}$$

也就是说，和波束对应的信号向量的响应为 $\frac{A_k \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{a}_\theta}{M}$ 。与此同时，我们可以构建如下的导向矢量

$$\mathbf{d}_\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^{-j \frac{2\pi f_c (M-1) d \sin \theta}{c}} \\ -e^{-j \frac{2\pi f_c M d \sin \theta}{c}} \\ \vdots \\ -e^{-j \frac{2\pi f_c (2M-1) d \sin \theta}{c}} \end{bmatrix},$$

利用该导向矢量对接收信号矩阵进行投影，得到的便是差波束：

$$\mathbf{z}_\theta = \frac{1}{M} \mathbf{X}^H \mathbf{d}_\theta = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{d}_\theta \approx \frac{A_k \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{d}_\theta}{M} \mathbf{r}^{(k)}.$$

即，目标在差波束上的响应为 $\frac{A_k \mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{d}_\theta}{M}$ 。差波束的响应与和波束的响应之间的差异的比值是关于入射角 θ_k 的函数：

$$\begin{aligned} f(\theta_k) &= \frac{\mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{d}_\theta}{\mathbf{a}_{\theta_k}^H \mathbf{a}_\theta} = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi f_c m d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}} - \sum_{m=M}^{2M-1} e^{j \frac{2\pi f_c m d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}}{\sum_{m=0}^{2M-1} e^{j \frac{2\pi f_c m d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}} \\ &= \frac{\left(1 - e^{j \frac{2\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}\right) \sum_{m=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi f_c m d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}}{\left(1 + e^{j \frac{2\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}\right) \sum_{m=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi f_c m d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}} \\ &= \frac{1 - e^{j \frac{2\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}}{1 + e^{j \frac{2\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}} \\ &= \frac{e^{-j \frac{\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}} - e^{j \frac{\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}}{e^{-j \frac{\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}} + e^{j \frac{\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c}}} \\ &= -j \tan \left(\frac{\pi f_c M d (\sin \theta_k - \sin \theta)}{c} \right). \end{aligned}$$

因此，通过提取差波束与和波束的响应值的比值的虚部，我们可以求解得到更加精确的目标入射角 θ_k 。而这种构建和差波束的方法也被成为半阵法。

3.3 测速

测速的基本原理与测角类似, 为了方便理解, 这里我们假设阵元数 $M = 1$, 此时, 接收信号矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K A_k \mathbf{r}^{(k)} \mathbf{b}_{-v_k}^H + \mathbf{N} = \mathbf{R} \mathbf{B}^H + \mathbf{N}.$$

同样地, 我们可以构建速度 v 对应的导向矢量:

$$\mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j \frac{2\pi f_c 2T_r v}{c}} \\ \vdots \\ e^{-j \frac{2\pi f_c 2(N-1)T_r v}{c}} \end{bmatrix}.$$

利用该导向矢量对接收信号矩阵进行投影, 得到的便是速度 v 方向上的接收信号:

$$\mathbf{y}_v = \frac{1}{N} \mathbf{X}^H \mathbf{b}_v.$$

如令

$$v_i = \frac{ic}{2f_c T_r N}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

那么所有的导向矢量构成了如下的傅里叶变换矩阵:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{v_0} & \mathbf{b}_{v_1} & \dots & \mathbf{b}_{v_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j \frac{2\pi(N-1)}{N}} \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi 2}{N}} & \dots & e^{-j \frac{2\pi 2(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi(N-1)}{N}} & \dots & e^{-j \frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix}.$$

对应的各个速度下的接收信号矩阵可以表示为

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{N} \mathbf{X}^H \mathbf{F}.$$

换句话说, 对接收矩阵沿着多普勒维度进行傅里叶变换, 便可以实现测速。